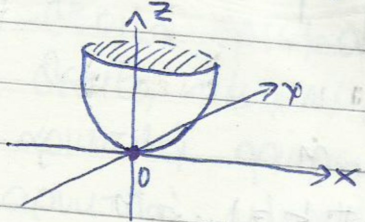
Παρατήρηση

Αν η $Hf(x)$ ημιορισμένος, δεν μπορώ να βγάλω κάποιο συμπέρασμα (από αυτό το θεώρημα της ικανής συνθήκης τοπ. ακροτάτου)

Π.Χ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ το γνωστό παραβολοειδές.



Μια απλή θεώρηση της f δείχνει ότι το $(x,y) = (0,0)$ έχει γνήσιο ολ. ελάχιστο.

Βάσει κριτηρίων όμως, έχουμε:

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} \overset{(0,0)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

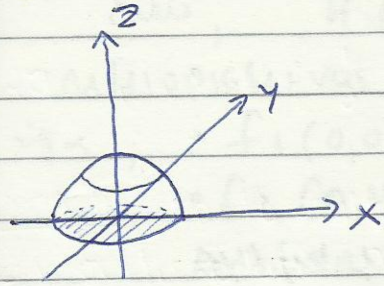
$\Rightarrow$ Το μοναδικό τοπ. ακρότατο είναι το $f(0,0)$ και συγκεκριμένα τοπ. ελάχιστο (το οποίο είναι και ολικό)

Πχ2

Έστω η $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x,y) \in B((0,0),1)$

όπου $B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$

γνωστό ως το πάνω ημισφαίριο.



δηλαδή το $(0,0)$ είναι σημείο ολ. μεγ.

βάσει κριτηρίων όμως, έχουμε:

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(-x,-y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \end{pmatrix} =$$

$$\overset{f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}}{=} \begin{pmatrix} \frac{-f(x,y) + x\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)}{f^2(x,y)} & \frac{-x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)}{f^2(x,y)} \\ \frac{y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)}{f^2(x,y)} & \frac{-f(x,y) + y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)}{f^2(x,y)} \end{pmatrix}$$

Άρα, $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ αρνητικά ορισμένος

Επομένως, το $(0,0)$ σημείο γν. τοπ. μεγίστου άρα και ολικό μέγιστο στο $(0,0)$ το $f(0,0)$

Παρατήρηση:

Η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x,y)\in B((0,0),1)$ μπορούμε αν θέλουμε να την επεκτείνουμε στο $\overline{B}((0,0),1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ και τη συμβολίζουμε ως $\widetilde{f}(x,y)$ και αφού $\overline{B}((0,0),1)$ συμπαγές και $\widetilde{f}$ συνεχής, ξέρουμε ότι $\exists (x_0,y_0)\in\overline{B}((0,0),1)$ με $\widetilde{f}(x_0,y_0)=\max\{\widetilde{f}(x,y) : (x,y)\in\overline{B}((0,0),1)\}$

Άρα $\forall (x,y)\in\partial B((0,0),1)$ έχουμε $\widetilde{f}(x,y)=0$ και για $(0,0)$ έχουμε $\widetilde{f}(0,0)=f(0,0)=1$, $(x_0,y_0)\in B((0,0),1)$

Εκεί όμως θα έχουμε $\nabla f(x_0,y_0)=0$. Το μόνο σημείο όπου $\in B((0,0),1)$ με $\nabla f(x_0,y_0)=0$ είναι το $(0,0)$. Άρα, αυτό είναι σημείο ολικού μεγίστου. Όμοια μπορεί να λυθεί και η $f(x,y)=x^2+y^2$ αν την περιορίσουμε στο $\overline{B}((0,0),R)$.

Πχ3

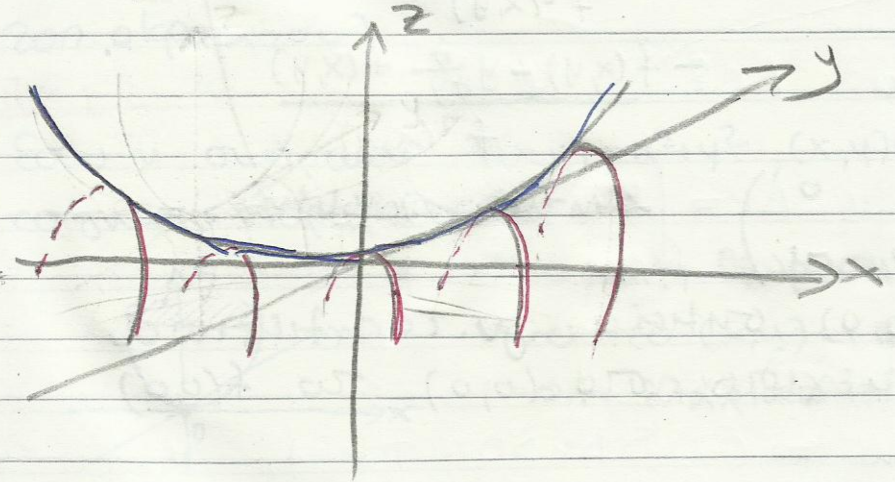
Έστω η $f(x,y)=x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Βλέπουμε ότι $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ως πολυωνυμική

$$\nabla f(x,y)=(2x,-2y)=(0,0)\iff(x,y)=(0,0)$$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$ μη ορισμένος

Άρα, το $(0,0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου είναι σαγματικό σημείο



Υπενθύμιση

Αν $Hg(x,y)$ ημιορισμένος $\Rightarrow$ δεν μας λέει κάτι το θεώρημα

Πχ 4

Έστω οι συναρτήσεις:

$f_1(x,y) = x^2+y^4$, $f_2(x,y) = x^2$ και $f_3(x,y) = x^2+y^3$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Προφανώς $\nabla f_1(x,y) = (2x, 4y^3)$

$\nabla f_2(x,y) = (2x,0)$ και $\nabla f_3(x,y) = (2x, 3y^2)$

όπου βλέπουμε ότι $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $i=1,2,3$ ως πολυώνυμα.

$\nabla f_1, f_2, f_3(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

Δηλαδή το μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0,0)$

$$Hf_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}, \quad Hf_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και $$H_3f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Ενώ, $$Hf_i(x_0,y_0) = Hf_i(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ημιορισμένος πίνακας

Άρα;
- $f_1(0,0) \rightsquigarrow$ ολικό ελάχιστο
- $f_2(0,y) \rightsquigarrow$ —"— —"— $\forall y\in\mathbb{R}$

Δηλ. το $f_2(0,0)$ γν. ολ. ελάχιστο
- $f_3(0,0)$ δεν είναι ούτε τοπ. ελαχ ούτε τοπ. μεγ

(αφού $f_3(\varepsilon,0) > f_3(0,0) = 0$

και $f_3(0,-\varepsilon) < f_3(0,0) = 0$)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν τα σημεία ακροτάτου της συνάρτησης

$f(x,y) = (4x^2+y^2)\cdot e^{-x^2-4y^2}$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και χαρακτηρίστε αυτά.